CAPITOLO 12

Lezione del giorno giovedì 31 ottobre 2013 (1 ora)
Differenziali per funzioni di più variabili - introduzione

PROPOSIZIONE 12.1 (Continuità di applicazioni lineari tra spazi normati). *Siano X, Y spazi normati. $T : X \to Y$ applicazione lineare. Allora T è continua se e solo se esiste $\ell > 0$ tale che:*

$$\|Tx\|_Y \leq \ell \|x\|_X.$$

Inoltre la minima costante ℓ per cui tale disuguaglianza vale è:

$$\ell = \sup\{\|Tx\|_Y : \|x\|_X \leq 1\} = \sup\{\|Tx\|_Y : \|x\|_X = 1\}.$$

Tale costante si indica anche con $\|T\|_{\mathcal{L}}$.

Denotato con $\mathcal{L}(X, Y)$ lo spazio delle funzioni lineari e continue da X in Y, si ha che lo spazio $(\mathcal{L}(X, Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$ è normato.

DEFINIZIONE 12.2 (Derivata direzionale). Siano X e Y due $\mathbb{R}$-spazi normati, D aperto di X, $f : D \to Y$ una funzione, $u \in X$ un vettore di X tale che $\|u\|_X = 1$. Sia $p \in D$ e supponiamo che esista il seguente limite:

$$\boxed{\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(p + tu) - f(p)}{t} =: v \in Y.}$$

nel punto p !!

Allora v prende il nome di derivata di f in p nella direzione u e si indica con uno dei seguenti simboli:

$$v = \frac{\partial f}{\partial u}(p) = D_u f(p) = \partial_u f(p).$$

Se $X = \mathbb{R}^n$ e $u = e_i$ è l'i-esimo vettore della base canonica, allora $D_{e_i} f(p) = D_i f(p)$ è l'i-esima derivata parziale di f in p. Se una funzione è assegnata mediante le sue coordinate, le sue derivate parziali si calcolano derivando rispetto alla variabile voluta, trattando le altre come se fossero costanti.

DEFINIZIONE 12.3 (Differenziale). Siano X e Y due $\mathbb{R}$-spazi normati, D aperto di X, $p \in D$, $f : D \to Y$ una funzione. Sia $T : X \to Y$ lineare e continua. Diremo che f è differenziabile in p e che il differenziale di f in p è T se vale:

$$\boxed{\lim_{x \to p} \frac{\|f(x) - f(p) - T(x - p)\|_Y}{\|x - p\|_X} = 0.}$$

nel punto p !!

Il differenziale di f in p se esiste è unico e si indica con $T = f'(p) = Df(p)$, inoltre se f è differenziabile in p allora è continua in p. Si ha $Df(p)u = \partial_u f(p) \in Y$.

OSSERVAZIONE 12.4. Se $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, il differenziale in p è un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$. Le applicazioni lineari tra spazi di dimensione finita sono sempre continue (il che non è vero in generale se X, Y hanno dimensione infinita). Lo spazio delle funzioni lineari da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ è *isomorfo* allo spazio delle matrici $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ a coefficienti reali.

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è differenziabile in p, al differenziale corrisponde pertanto una matrice $n \times m$, detta *matrice Jacobiana* di $f = (f_1, ..., f_m)$ e si ha:

$$\mathrm{Jac}\, f(p) := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(p) & \dots & \partial_{x_n} f_1(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_n} f_m(p) & \dots & \partial_{x_n} f_m(p) \end{pmatrix}.$$

Se $v = (v_1, ..., v_m)$ si ha allora

$$df(p)(v) = \mathrm{Jac}\, f(p)(v) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(p) & \dots & \partial_{x_n} f_1(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_n} f_m(p) & \dots & \partial_{x_n} f_m(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}.$$

Nel caso particolare di funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si ha che f ha una sola componente e quindi $\mathrm{Jac}\, f(p) = (\partial_{x_1} f(p), \dots \partial_{x_n} f(p))$ è un vettore di $\mathbb{R}^n$ (matrice costituita da una sola riga e n colonne). Indicheremo tale vettore anche con $\nabla f(p)$ o $\mathrm{grad}\, f(p)$ e lo chiameremo *gradiente* di f in p.

Proposizione 12.5. *Condizione necessaria perchè f sia differenziabile in p è che f ammetta in p derivate secondo ogni vettore, e in tal caso si ha $Df(p)u = \partial_u f(p)$.*

Osservazione 12.6. Se $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$, il differenziale in p è un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$. Scelta una base, un qualunque vettore $h = (h_1, ..., h_n)$ di $\mathbb{R}^n$, si scrive in modo unico come $h = \sum_{j=1}^n h_j e_j$. Pertanto, per linearità:

$$\boxed{df(p)(h)} = df(p)\left(\sum_{j=1}^n h_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n df(p)(e_j) \cdot h_j = \boxed{\sum_{j=1}^n \partial_{x_j} f(p)\, h_j} \in \mathbb{R}.$$

Scriveremo anche:

$$df(p) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} f(p)\, dx_j,$$

per indicare che $df(p)$ valutato su un vettore $h = (h_1, ..., h_n)$ restituisce il numero reale

$$df(p)(h) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} f(p)\, h_j \in \mathbb{R}.$$

Teorema 12.7 (del differenziale totale). *Sia D aperto di $\mathbb{R}^n$, $p \in D$, $f : D \to Y$. Se le derivate parziali di f esistono in D e sono continue in p, allora f è differenziabile in p.*

Proposizione 12.8 (Proprietà del differenziale). *L'operatore di differenziazione è lineare:*

$$D(\alpha f + \beta g) = \alpha Df + \beta Dg.$$

Per le funzioni composte vale la regola della catena: $D(f \circ g)(p) = Df(g(p)) \circ Dg(p)$, dove $\circ$ indica la composizione di funzioni.

Definizione 12.9 (Funzioni C^1). Diremo che $f : D \to Y$ dove D è aperto di $\mathbb{R}^n$ è di classe $C^1(D, Y)$ se in D esistono tutte le derivate parziali di f e sono continue.

Definizione 12.10 (Differenziale secondo). Siano X, Y normati, $D \subseteq X$ aperto, $f : D \to Y$ una funzione, $u \in X$. Se per ogni $x \in D$ esiste $\partial_u f(x)$, si può considerare la funzione $\partial_u f : D \to Y$ che associa ad x l'elemento di Y dato da $\partial_u f(x)$. A questo punto, fissato $v \in X$, ci si può chiedere se esista o meno $\partial_v(\partial_u f)(x)$. Se f è differenziabile in D, resta definita una mappa $f' : D \to \mathcal{L}(X, Y)$. Essendo quest'ultimo normato, ha senso chiedersi se quest'applicazione sia a sua volta differenziabile. In tal caso di differenziale di f' in p prende il nome di differenziale secondo di f in p e si indicherà con $f''(p)$, $D^2 f(p)$ ecc. Si ha che $f''(p) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y)) \simeq \mathcal{L}^2(X \times X, Y)$ che indica lo spazio delle funzioni $L : X \times X \to Y$ *bilineari* e continue, ovvero lineari rispetto a ciascun argomento separatamente. Il lettore interessato ai dettagli può consultare [5].

Definizione 12.11. Con il simbolo $\mathbb{K}$ indicheremo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Teorema 12.12. *Sia E spazio metrizzabile, $a, b \in \mathbb{R}$, $f : E \times [a, b] \to \mathbb{K}$ funzione continua. La formula*

$$F(x) := \int_a^b f(x, t)\, dt$$

definisce allora una funzione continua $F : E \to \mathbb{K}$.

TEOREMA 12.13. *Sia X un $\mathbb{K}$-spazio normato, E aperto di X, $a, b \in \mathbb{R}$, ed $f : E \times [a, b] \to \mathbb{K}$ funzione continua; sia u vettore di X. Se per ogni $x \in E$ e $t \in [a, b]$ esiste $\partial_u f(x, t)$, e tale derivata è continua in $E \times [a, b]$, allora $\partial_u F(x)$ esiste in E e si ha*

$$\partial_u F(x) = \int_a^b \partial_u f(x, t)\, dt$$

e per il precedente, tale derivata è continua.

PROPOSIZIONE 12.14. *Sia X spazio normato, E aperto di X, I intervallo di $\mathbb{R}$, $f : E \times I \to Y$ (Y spazio di Banach) funzione continua, e sia $\Phi : E \times I \times I \to Y$ definita da:*

$$\Psi(x, \alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta f(x, t)\, dt$$

Allora:

(1) *la funzione Ψ è continua;*
(2) *la funzione Ψ è sempre derivabile (e quindi differenziabile) nelle variabili α, β, essendo:*
$$\partial_\beta \Psi(x, \alpha, \beta) = f(x, \beta), \qquad \partial_\alpha \Psi(x, \alpha, \beta) = -f(x, \alpha);$$
(3) *supponiamo $X \approx \mathbb{K}^n$ spazio di dimensione finita. Se $\partial_i f(x, t)$, $i = 1...n$ esistono continue, allora $\Psi(x, \alpha, \beta)$ è differenziabile con continuità (sui reali, le variabili α, β sono reali), e si ha:*
$$\Psi'(x, \alpha, \beta)(h, \triangle\alpha, \triangle\beta) = \sum_{j=1}^{n} \left(\int_\alpha^\beta \partial_j f(x, t)\, dt \right) h_j + f(x, \beta)\triangle\beta - f(x, \alpha)\triangle\alpha,$$
con $h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{K}^n$.
(4) *se $x \mapsto \alpha(x)$, $x \to \beta(x)$ denotano funzioni $\mathbb{R}$-differenziabili a valori in I, $\alpha, \beta : E \to I \subseteq \mathbb{R}$, allora*
$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, t)\, dt$$
è differenziabile e si ha:
$$\partial_k G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \partial_k f(x, t)\, dt + f(x, \beta(x))\partial_k \beta(x) - f(x, \alpha(x))\partial_k \alpha(x).$$

CAPITOLO 13

Lezione del giorno lunedì 4 novembre 2013 (1 ora) Differenziali per funzioni di più variabili - continuazione

ESERCIZIO 13.1. Calcolare le derivate parziali ed il differenziale delle seguenti funzioni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

(1) $f(x,y) = x^2 \sin y$;
(2) $f(x,y) = \sqrt{|x|}$;
(3) $f(x,y) = |xy|$;
(4) $f(x,y) = |x| + |y|$;
(5) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$;
(6) $f(x,y) = \operatorname{sign}(2 - x^2 - y^2)\sqrt{|2 - x^2 - y^2|}$;

SVOLGIMENTO.

(1) $\partial_x f(x,y) = 2x \sin y$, $\partial_y f(x,y) = x^2 \cos y$. Queste derivate parziali sono continue su tutto $\mathbb{R}^2$, quindi la funzione è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$ e $Df(x,y) = 2x \sin y\, dx + x^2 \cos y\, dy$.

(2) $\partial_x f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sign}(x)}{2\sqrt{|x|}}$ se $x \neq 0$, $\partial_y f(x,y) = 0$. La funzione è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$ e il suo differenziale è $Df(x,y) = \dfrac{\operatorname{sign}(x)}{2\sqrt{|x|}}\, dx$

(3) $\partial_x f(x,y) = |y| \operatorname{sign}(x)$, $\partial_y f(x,y) = |x| \operatorname{sign}(y)$. La funzione è differenziabile nei punti dove $xy \neq 0$, e il suo differenziale vale $Df(x,y) = |y|\operatorname{sign}(x)\, dx + |x|\operatorname{sign}(y)\, dy$. (OSS. È DIFF. PURE IN (0,0))

(4) $\partial_x f(x,y) = \operatorname{sign}(x)$, $\partial_y f(x,y) = \operatorname{sign}(y)$. La funzione è differenziabile nei punti dove $xy \neq 0$ e il suo differenziale vale $Df(x,y) = \operatorname{sign}(x)\, dx + \operatorname{sign}(y)\, dy$.

(5) Si ha $\partial_x f(x,y) = \dfrac{y}{2\sqrt{|xy|}}\operatorname{sign}(xy)$, $\partial_y f(x,y) = \dfrac{x}{2\sqrt{|xy|}}\operatorname{sign}(xy)$. La funzione è differenziabile nei punti dove $xy \neq 0$ e il suo differenziale vale $Df(x,y) = \dfrac{y}{2\sqrt{|xy|}}\operatorname{sign}(xy)\, dx + \dfrac{x}{2\sqrt{|xy|}}\operatorname{sign}(xy)\, dy$.

(6) $\partial_x f(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{|2-x^2-y^2|}}$, $\partial_y f(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{|2-x^2-y^2|}}$. La funzione è differenziabile in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ ad eccezione della circonferenza $x^2 + y^2 = 2$, e il differenziale è dato da

$$Df(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{|2-x^2-y^2|}}\, dx - \frac{y}{\sqrt{|2-x^2-y^2|}}\, dy.$$

ESERCIZIO 13.2. Sia $v = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$. Si calcoli la derivata in direzione v nel punto $(0,0,0)$ della funzione $f(x,y,z) = (2x - 3y + 4z)\cos(xyz)$.

$v = (v_x, v_y, v_z)$

SVOLGIMENTO. Calcoliamo le derivate parziali di f:

$$\partial_x f(x,y,z) = 2\cos(xyz) - yz(2x - 3y + 4z)\sin(xyz)$$
$$\partial_y f(x,y,z) = -3\cos(xyz) - xz(2x - 3y + 4z)\sin(xyz)$$
$$\partial_z f(x,y,z) = 4\cos(xyz) - xy(2x - 3y + 4z)\sin(xyz).$$

Le derivate sono continue su $\mathbb{R}^3$, quindi la funzione è differenziabile su $\mathbb{R}^3$. Per definizione, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0,0) = Df(0,0,0)u = \partial_x f(0,0,0)u_x + \partial_y f(0,0,0)u_y + \partial_z f(0,0,0)u_z = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Se la funzione è differenziabile in un punto (es. (0,0,0)) $\Rightarrow$ è derivabile secondo ogni direzione $v = (v_x, v_y, v_z)$, $|v| = 1$ e $\partial_v f(0,0) = df_{(0,0,0)}(v) = (\partial_x f(0,0,0), \partial_y f(0,0,0), \partial_z f(0,0,0)) \cdot (v_x, v_y, v_z)$

CAPITOLO 14

Lezione del giorno mercoledì 6 novembre 2013 (1 ora) Differenziali per funzioni di più variabili - conclusione

Esercizio 14.1. Discutere continuità, derivabilità direzionale e differenziabilità nell'origine per le seguenti funzioni:

(1) $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ se $(x,y)\neq 0$, $f(0,0)=0$;

(2) $f(x,y) = \dfrac{\log(1+3y^3)}{x^2+y^2}$ se $(x,y)\neq 0$, $f(0,0)=0$;

(3) $f(x,y) = \dfrac{\sin\left(y+\sqrt{|x|}\right)\log(1+y^2)}{x^2+y^2}$ se $(x,y)\neq 0$, $f(0,0)=0$;

(4) $f(x,y) = \dfrac{\arctan(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ se $(x,y)\neq 0$, $f(0,0)=0$;

Svolgimento.

(1) Controlliamo il limite lungo la curva $\gamma(t)=(t,t^3)$. Tale curva tende a $(0,0)$ se $t\to 0^+$.

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0}\frac{t^6}{2t^6} = \frac{1}{2}\neq 0 = f(0,0).$$

Quindi la funzione non è continua nell'origine e pertanto non è nemmeno differenziabile in $(0,0)$. La funzione è costante lungo gli assi e vale zero, quindi le due derivate parziali nell'origine sono nulle. Calcoliamo le derivate direzionali nella direzione degli altri vettori $v=(v_x,v_y)$ con $v_x\neq 0$, $v_y\neq 0$ si ha

$$\begin{aligned}\partial_v f(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(v_x,v_y))-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t(v_x,v_y))}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\,\frac{t^4v_x^3v_y}{t^6v_x^6+t^2v_y^2}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{tv_x^3v_y}{t^4v_x^6+v_y^2} = 0.\end{aligned}$$

Quindi le derivate direzionali rispetto ad ogni vettore in $(0,0)$ esistono e sono tutte nulle, ma la funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

(2) Vale la seguente maggiorazione:

$$|f(x,y)| \leq \left|\frac{\log(1+3y^3)}{y^2}\right| = \left|\frac{\log(1+3y^3)}{3y^3}\right| |3y| \to 0.$$

Pertanto la funzione è continua in $(0,0)$. La funzione è costante sull'asse $y=0$, quindi $\partial_x f(0,0)=0$. Si ha d'altra parte:

$$\partial_y f(0,0) = \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \frac{\log(1+3h^3)}{h^3}\to 3,$$

e quindi $\partial_y f(0,0) = 3$. Consideriamo quindi la funzione lineare $L(x,y) = 3y$. Si ha:

$$\left|\frac{f(x,y) - f(0,0) - L(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\frac{\frac{\log(1+3y^3)}{y^2+x^2} - 3y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \left|\frac{\log(1+3y^3) - 3y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right|$$

$$= \left|\frac{\log(1+3y^3) - 3y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{3yx^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right|$$

Verifichiamo il limite sulla curva $\gamma(t) = (t,t)$, si ha:

$$\left|\frac{f(t,t) - f(0,0) - L(t,t)}{\sqrt{t^2+t^2}}\right| = \left|\frac{\log(1+3t^3) - 3t^3}{2^{3/2}t^3} - \frac{3t^3}{2^{3/2}t^3}\right|$$

$$= \frac{1}{2^{3/2}}\left|\frac{\log(1+3t^3) - 3t^3}{t^3} - 3\right| \to \frac{3}{\sqrt{8}} \neq 0$$

Pertanto il differenziale non esiste.

Si poteva procedere anche nel modo seguente: calcoliamo la derivata lungo il vettore $v = (1,1)$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0+t) - f(0,0)}{t\|v\|} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\log(1+3t^3)}{t^3} = \frac{3}{\sqrt{8}}.$$

Se il differenziale esistesse, sarebbe un'applicazione lineare L tale che $L(0,1) = \partial_y f(0,0)$, $L(1,1) = \partial_v f(0,0)$ e $L(1,0) = \partial_x f(0,0)$. Poiché i vettori $(0,1)$ e $(1,1)$ sono linearmente indipendenti e $L(0,1) \neq 0$, $L(1,1) \neq 0$, si deduce che $L(v_x, v_y) = 0$ se e solo se $v_x = v_y = 0$, tuttavia si ha $L(1,0) = 0$, assurdo.

(3) consideriamo

$$|f(x,y)| \leq \left|\sin\left(y + \sqrt{|x|}\right)\right| \left|\frac{\log(1+y^2)}{y^2}\right|$$

Il termine con il seno è infinitesimo e l'altro tende a 1, quindi il limite è nullo e $f(x,y)$ è continua in $(0,0)$. La funzione è costante sull'asse $y = 0$, quindi $\partial_x f(0,0) = 0$. Si ha invece

$$f(0,y) = \sin y \frac{\log(1+y^2)}{y^2}.$$

Ciò implica:

$$\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \frac{\sin y}{y} \frac{\log(1+y^2)}{y^2} \to 1.$$

Quindi $\partial_y f(0,0) = 1$. Calcoliamo ora la derivata lungo il vettore $(1,1)$:

$$\frac{f(t,t) - f(0,0)}{t\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin(t+\sqrt{|t|})}{t} \frac{\log(1+t^2)}{t^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin(t+\sqrt{|t|})}{t+\sqrt{|t|}} \frac{t+\sqrt{|t|}}{t} \frac{\log(1+t^2)}{t^2} \to \infty.$$

Il differenziale non esiste.

(4) In coordinate polari si ha:

$$|f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| = \left|\frac{\arctan\rho^2}{\rho^2}\right| \rho \to 0,$$

quindi la funzione è continua. La funzione è simmetrica $f(x,y) = f(y,x)$. Calcoliamo le derivate parziali:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \frac{\arctan t^2}{t^2} = 1,$$

quindi $\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 1$. Se il differenziale L esiste, si ha $L(x,y) = x+y$. Verifichiamo con la definizione:

$$\left|\frac{f(x,y) - f(0,0) - L(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\frac{\frac{\arctan(\rho^2)}{\rho} - \rho(\cos\theta + \sin\theta)}{\rho}\right| = \left|\frac{\arctan(\rho^2)}{\rho^2} - (\cos\theta+\sin\theta)\right|$$

Scelto $\theta = \pi/4$, si ha

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \left|\frac{f(x,y) - f(0,0) - L(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \lim_{\rho\to 0^+}\left|\frac{\arctan(\rho^2)}{\rho^2} - \sqrt{2}\right| \to \sqrt{2} - 1 \neq 0.$$

Quindi la funzione non è differenziabile in $(0,0)$

ESERCIZIO 14.2.

(1) Sia $f(x,y) = y^{2/3}(y + x^2 - 1)$. Stabilire in quali punti esiste $\partial_y f$ e calcolarla.
(2) Sia $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2(y-1)}+1$. Mostrare che la funzione non è differenziabile in $(0,1)$ e calcolare $D_v f(0,1)$ al variare del versore v.
(3) Si mostri che la seguente funzione è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e se ne discutano derivabilità direzionale e differenziabilità:

$$f(x,y) = \int_0^{x^2y} \frac{\arctan t}{t}\, dt.$$

SVOLGIMENTO.

(1) Se $y \neq 0$ si ha $\partial_y f(x,y) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{y}}(y + x^2 - 1) + y^{2/3}$. Se $y = 0$, allora

$$\partial_y f(x,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(x,y) - f(x,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{y+x^2-1}{\sqrt[3]{y}}.$$

Tale limite esiste finito solo se $x^2 - 1 = 0$, ossia $x = \pm 1$. In tal caso è nullo. Quindi si ha $\partial_y f(\pm 1, 0) = 0$.

(2) Utilizziamo coordinate polari centrate in $(0,1)$, ovvero $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta + 1$ Si ha quindi

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta + 1) = \sqrt[3]{\rho^3\cos\theta\sin\theta} = \rho\sqrt[3]{\cos\theta\sin\theta}.$$

Il punto $(0,1)$ corrisponde a $\rho = 0$ e $f(0,1) = 1$. v è un versore, pertanto $v = (\cos\theta, \sin\theta)$. Si ha allora che

$$\partial_v f(0,1) = \lim_{t\to 0^+}\frac{f((0,1)+tv) - f(0,1)}{t} = \sqrt[3]{\cos\theta\sin\theta}.$$

L'applicazione $v \mapsto \partial_v f(0,1)$ non è lineare, quindi la funzione non è differenziabile.

(3) La funzione integranda è continua, quindi l'integrale esiste per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Per i noti teoremi di derivazione di integrali dipendenti da parametro, si ha per $xy \neq 0$:

$$\partial_x f(x,y) = 2xy\frac{\arctan(x^2y)}{x^2y} = \frac{\arctan(x^2y)}{x},$$

$$\partial_y f(x,y) = x^2\frac{\arctan(x^2y)}{x^2y} = \frac{\arctan(x^2y)}{y}.$$

Nei punti con $xy = 0$, la funzione è identicamente nulla. In tali punti si ha $f(x+h,y) = f(x,y+h) = 0$, pertanto le due derivate parziali sono entrambe nulle. Le derivate parziali sono continue su tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : xy = 0\}$, pertanto in questo insieme la funzione è differenziabile. Nei punti di $\Sigma := \{(x,y) : xy = 0\}$, entrambe le derivate parziali sono nulle, quindi se il differenziale in Σ esiste deve essere la funzione nulla.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})\\ xy\neq 0}} \partial_x f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})\\ xy\neq 0}} \frac{\arctan(x^2y)}{x} = \lim_{\substack{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})\\ xy\neq 0}} \frac{\arctan(x^2y)}{x^2y} xy$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})\\ xy\neq 0}} \partial_x f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})\\ xy\neq 0}} \frac{\arctan(x^2y)}{y} = \lim_{\substack{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})\\ xy\neq 0}} \frac{\arctan(x^2y)}{x^2y} x^2$$

Ricordando che $\lim_{s\to 0} \frac{\arctan s}{s} = \frac{d}{ds}\arctan(0) = 1$ (si ricordi il teorema di derivazione della funzione inversa), e che $|\arctan s/s| \leq 1$ si ottiene:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})\\ xy\neq 0}} \partial_x f(x,y) = 0 = \partial_x f(\bar{x},\bar{y})$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})\\ xy\neq 0}} \partial_y f(x,y) = \bar{x}^2$$

Pertanto le derivate parziali sono continue nell'origine e quindi la funzione è differenziabile anche nell'origine. Verifichiamo la differenziabilità nei punti di $\Sigma \setminus \{(0,0)\}$: se il differenziale esistesse dovrebbe essere la funzione nulla, in particolare tutte le derivate direzionali secondo ogni vettore $v = (v_x, v_y)$ dovrebbero restituire 0. Fissiamo $(\bar{x},\bar{y}) \in \Sigma\setminus\{(0,0)\}$ e consideriamo

$$\frac{f(\bar{x}+sv_x, \bar{y}+sv_y) - f(\bar{x},\bar{y})}{s} = \frac{1}{s}\int_0^{(\bar{x}+sv_x)^2(\bar{y}+sv_y)} \frac{\arctan t}{t}\,dt$$

Distinguiamo vari casi:

(a) se $\bar{x} = 0$, $\bar{y} \neq 0$ si ha

$$\left|\frac{f(\bar{x}+sv_x, \bar{y}+sv_y) - f(\bar{x},\bar{y})}{s}\right| = \frac{1}{|s|}\left|\int_0^{s^2v_x^2(\bar{y}+sv_y)} \frac{\arctan t}{t}\,dt\right| \leq \left|\frac{s^2v_x^2(\bar{y}+sv_y)}{s}\right|.$$

L'ultimo termine tende a zero per $s \to 0$, pertanto nei punti con $\bar{x} = 0$ la funzione è differenziabile.

(b) se $\bar{x} \neq 0$ e $\bar{y} = 0$ si ha

$$\left|\frac{f(\bar{x}+sv_x, \bar{y}+sv_y) - f(\bar{x},\bar{y})}{s}\right| = \frac{1}{|s|}\left|\int_0^{s(\bar{x}+sv_x)^2v_y} \frac{\arctan t}{t}\,dt\right|$$

L'estremo superiore di integrazione tende a zero in modulo per $s \to 0$, pertanto per s sufficientemente piccolo, la funzione integranda in modulo è maggiore di $1/2$. Scegliamo a questo punto $v_x = v_y = 1$. Si ha

$$\left|\frac{f(\bar{x}+sv_x, \bar{y}+sv_y) - f(\bar{x},\bar{y})}{s}\right| = \frac{1}{|s|}\left|\int_0^{s(\bar{x}+s)^2} \frac{1}{2}\,dt\right| \geq \left|\frac{s(\bar{x}+s)^2}{2s}\right| = \frac{|\bar{x}|}{2} \neq 0.$$

Pertanto la funzione non è differenziabile nei punti con $\bar{x} \neq 0$, $y = 0$.

CAPITOLO 15

Lezione del giorno giovedì 7 novembre 2013 (1 ora) Differenziali per funzioni di più variabili - riepilogo

Esercizio 15.1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = \max\left\{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-1}{2}, \min\left\{1, x^2+y^2\right\}\right\}.$$

Descrivere il grafico di f, determinare per quali punti di $\mathbb{R}^2$ la funzione è differenziabile, e calcolare il piano tangente nei punti $P_1 = \left(0, \frac{1}{2}, f\left(0, \frac{1}{2}\right)\right)$, $P_2 = (0, 2, f(0,2))$, $P_3 = (0, 4, f(0,4))$.

Svolgimento. La forma della funzione suggerisce di considerare coordinate polari, ovvero scriviamo

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \max\left\{\frac{\rho-1}{2}, \min\left\{1, \rho^2\right\}\right\}.$$

Pertanto in $\mathbb{R}^3$ il grafico di f è costituito dalla rotazione attorno all'asse z della funzione di una sola variabile

$$\tilde{h}(\rho) := \max\left\{\frac{\rho-1}{2}, \min\left\{1, \rho^2\right\}\right\}.$$

Osserviamo che $\tilde{h}$ non è derivabile per $\rho = 1$ o $\rho = 3$. Quindi f non è differenziabile in direzione radiale per $x^2+y^2 = 1$ o $x^2+y^2 = 9$. Il caso $\rho = 0$ va studiato a parte. In un intorno di $(0,0)$ la funzione f coincide con $f(x,y) = x^2+y^2$, pertanto è differenziabile in 0. Osserviamo che la funzione f è differenziabile nei punti richiesti, e $f(0,1/2) = 1/4$, $f(0,2) = 1$ e $f(0,4) = 3/2$. Nei punti di differenziabilità diversi dall'origine, si ha inoltre:

$$\partial_x f(x,y) = \partial_\rho \tilde{h}(\rho(x,y)) \cdot \partial_x \rho(x,y) = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 < x^2+y^2 < 1, \\ 0, & \text{se } 1 < x^2+y^2 < 9, \\ \dfrac{x}{2\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } x^2+y^2 > 9. \end{cases}$$

$$\partial_y f(x,y) = \partial_\rho \tilde{h}(\rho(x,y)) \cdot \partial_y \rho(x,y) = \begin{cases} 2y, & \text{se } 0 < x^2+y^2 < 1, \\ 0, & \text{se } 1 < x^2+y^2 < 9, \\ \dfrac{y}{2\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } x^2+y^2 > 9. \end{cases}$$

Nei punti considerati quindi si ha $\partial_x f\left(0, \frac{1}{2}\right) = \partial_x f(0,2) = \partial_x f(0,4) = 0$, mentre $\partial_y f\left(0, \frac{1}{2}\right) = 1$, $\partial_y f(0,2) = 0$, $\partial_y f(0,4) = 1/2$. Il piano tangente a $z = f(x,y)$ in P è fornito dalla formula:

$$\langle(\nabla f(x,y), -1), (x,y,z) - P\rangle = 0,$$

oppure

$$z - P_z = \langle\nabla f(x,y), (x - P_x, y - P_y)\rangle.$$

Nel nostro caso, si ha

$$\pi_1 : z - \frac{1}{4} = y - \frac{1}{2},$$
$$\pi_2 : z - 1 = 0,$$
$$\pi_3 : z - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(y-4),$$

ovvero $\pi_1 : z = y - 1/4$, $\pi_2 : z = 1$, $\pi_3 : y = 2z + 1$.

Esercizio 15.2. Calcolare il gradiente della seguente funzione:

$$f(x,y) = \int_0^{xy^2} e^{-t^2}\,dt$$

nel punto $(1,3)$.

Svolgimento. Per le proprietà di regolarità dei funzionali integrali, si ha che f è differenziabile in ogni punto. Si ha inoltre che, posto $\beta(x,y) = xy^2$, $g(t) = e^{-t^2}$

$$\nabla f(x,y) = (g(\beta(x,y)) \cdot \partial_x \beta(x,y), g(\beta(x,y)) \cdot \partial_y \beta(x,y)) = (e^{-x^2y^4}y^2, 2e^{-x^2y^4}xy).$$

Quindi

$$\nabla f(x,y) = \frac{3}{e^{81}}(3,2).$$

Esercizio 15.3. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che vale

$$f(x,y) = \min\{(x-1)(y-1), (x+1)(y+1)\}.$$

Dire per quali punti f è continua e per quali punti è differenziabile.

Svolgimento. Dividiamo il piano in tre regioni:

$$H^+ := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)(y-1) < (x+1)(y+1)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y > 0\},$$
$$H^- := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)(y-1) > (x+1)(y+1)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y < 0\},$$
$$H^= := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)(y-1) = (x+1)(y+1)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y = 0\}.$$

In H^+ la funzione f coincide con $f_+(x,y) = (x-1)(y-1)$, nei punti di H^- la funzione f coincide con $f_-(x,y) = (x+1)(y+1)$, inoltre gli insiemi $H^\pm$ sono aperti, perché controimmagine tramite la funzione continua $(x,y) \mapsto f_+(x,y) - f_-(x,y)$ di $]0,-\infty[$ o di $]0,+\infty[$, rispettivamente. L'insieme $H^=$ è chiuso ed è la loro frontiera. Pertanto f è C^∞ in $H^\pm$. Sia quindi $(\bar{x},\bar{y}) \in H^=$ e sia $\{(x_n,y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Osserviamo che:

(1) se $(x_n,y_n) \in H^=$, allora $f(x_n,y_n) = f_\pm(x_n,y_n) \to f_\pm(\bar{x},\bar{y})$ per definizione ;
(2) se $(x_n,y_n) \in H^+$, allora $f(x_n,y_n) = f_+(x_n,y_n) \to f_+(\bar{x},\bar{y}) = f_-(\bar{x},\bar{y})$ perché $(\bar{x},\bar{y}) \in H^=$;
(3) se $(x_n,y_n) \in H^-$, allora $f(x_n,y_n) = f_-(x_n,y_n) \to f_-(\bar{x},\bar{y}) = f_+(\bar{x},\bar{y})$ perché $(\bar{x},\bar{y}) \in H^=$.

In tutti i casi quindi il valore del limite coincide con $f(\bar{x},\bar{y})$, pertanto la funzione è continua ovunque. Discutiamo la differenziabilità nei punti di $H^=$. A tal proposito, consideriamo un punto $(\bar{x},\bar{y})$ e $v = (1,1)$.

$$\begin{aligned}
D_v f(\bar{x},\bar{y}) &= \lim_{t\to 0} \frac{f((\bar{x},\bar{y})+tv) - f(\bar{x},\bar{y})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f_+((\bar{x},\bar{y})+tv) - f_+(\bar{x},\bar{y})}{t} \\
&= \nabla f_+(\bar{x},\bar{y}) \cdot (1,1) = 2 + \bar{x} + \bar{y} = 2. \\
D_{-v} f(\bar{x},\bar{y}) &= \lim_{t\to 0} \frac{f((\bar{x},\bar{y})-tv) - f(\bar{x},\bar{y})}{t} = -\lim_{t\to 0} \frac{f_-((\bar{x},\bar{y})-tv) - f_-(\bar{x},\bar{y})}{-t} \\
&= -\lim_{s\to 0} \frac{f_-((\bar{x},\bar{y})+sv) - f_-(\bar{x},\bar{y})}{s} = -\nabla f_-(\bar{x},\bar{y}) \cdot (1,1) = 2 + \bar{x} + \bar{y} = 2.
\end{aligned}$$

Tuttavia, se f fosse differenziabile, si dovrebbe avere per linearità $D_v f(\bar{x},\bar{y}) = -D_{-v} f(\bar{x},\bar{y})$, quindi f non è differenziabile in $H^=$.

(Non ho controllato questa parte, vedere se può essere utile)

CAPITOLO 16

Lezione del giorno lunedì 11 novembre 2013 (1 ora)
Massimi e minimi per funzioni di più variabili

OSSERVAZIONE 16.1. Siano X, Y normati, $D \subseteq X$ aperto, $f : D \to Y$ una funzione, $u \in X$. Se per ogni $x \in D$ esiste $\partial_u f(x)$, si può considerare la funzione $\partial_u f : D \to Y$ che associa ad x l'elemento di Y dato da $\partial_u f(x)$. A questo punto, fissato $v \in X$, ci si può chiedere se esista o meno $\partial_v(\partial_u f)(x) = \partial^2_{vu} f(x)$.

Richiamiamo la seguente:

DEFINIZIONE 16.2. Siano X, Y normati, $D \subseteq X$ aperto, $f : D \to Y$ una funzione differenziabile in ogni punto di D. Resta definita una mappa $df : D \to \mathcal{L}(X, Y)$ definita da $p \mapsto df(p)$. Essendo lo spazio $\mathcal{L}(X, Y)$ normato, ha senso chiedersi se quest'applicazione sia a sua volta differenziabile come mappa tra spazi normati. In tal caso, il differenziale di df in p prende il nome di differenziale secondo di f in p e si indicherà con $f''(p)$, $D^2 f(p)$ ecc. Si ha che $D^2 f(p) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$.

DEFINIZIONE 16.3. Siano X, Y, Z spazi normati su $\mathbb{K}$ (al solito $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Un'applicazione $B : X \times Y \to Z$ si dice *bilineare* se per ogni $x, x_1, x_2 \in X$, $y, y_1, y_2 \in Y$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ si ha:

$$B(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha B(x_1, y) + \beta B(x_2, y)$$
$$B(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha B(x, y_1) + \beta B(x, y_2),$$

ovvero la funzione B è *lineare in ciascun argomento.*

Il prodotto $X \times Y$ eredita da X, Y una naturale struttura di spazio vettoriale normato:

(1) le operazioni di somma e prodotto per scalari vengono eseguite componente per componente:
$$\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2).$$
(2) in perfetta analogia al caso $\mathbb{R}^2$, è possibile definire ciascuna di queste norme ($(x, y) \in X \times Y$, $p \geq 1$):
$$\|(x,y)\|_{p|X\times Y} = \left(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\right)^{1/p}, \qquad \|(x,y)\|_{\infty|X\times Y} = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\},$$
che risultano tra di loro tutte topologicamente equivalenti tra loro.

Definiamo lo spazio delle *forme bilineari e continue* su X:

$$\mathcal{L}^2(X \times X, Y) := \{B : X \times X \to \mathbb{R} \text{ bilineari e continue}\},$$

dove su $X \times X$ si pone una qualunque delle norme tra loro topologicamente equivalenti illustrate in precedenza (norme topologicamente equivalenti restituiscono com'è noto la stessa nozione di continuità).

PROPOSIZIONE 16.4. *Siano X, Y spazi normati su $\mathbb{K}$. Allora*

$$\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y)) \simeq \mathcal{L}^2(X \times X, Y).$$

OSSERVAZIONE 16.5. Supponiamo $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$, D aperto di X. Data $f : D \to \mathbb{R}$, il differenziale secondo in un punto è una mappa da $\mathbb{R}^n$ allo spazio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Si è visto come lo spazio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ sia isomorfo a $\mathbb{R}^n$, pertanto il differenziale secondo di f è rappresentabile come una mappa lineare da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$. Tutte le mappe lineari da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ sono rappresentabili medianti matrici quadrate $n \times n$ a coefficienti reali. In definitiva, fissato $p \in D$ esiste una ed una sola matrice $H \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tale che

$$\big(df(p)(h)\big)(k) = \langle H\,h, k\rangle,$$

dove a destra vi è l'usuale forma quadratica associata ad una matrice quadrata H applicata a due vettori $h, k \in \mathbb{R}^n$ (scriveremo anche $H(h, k)$). Tale matrice prende il nome di *matrice hessiana* di f in p e si indica con $Hf(p)$ oppure $D^2 f(p)$ o anche $\nabla^2 f(p)$, $\operatorname{Hess} f(p)$. Si ha

$$\operatorname{Hess} f(p) := \begin{pmatrix} \partial_{x_1 x_1} f(p) & \dots & \partial^2_{x_1 x_n} f(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial^2_{x_n x_1} f(p) & \dots & \partial^2_{x_n x_n} f(p) \end{pmatrix}.$$

Definizione 16.6. Sia X insieme, $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione.

(1) un punto $a \in X$ è detto di *minimo* assoluto per f se $f(y) \geq f(a)$ per ogni $y \in X$. Il minimo si dice stretto se $f(y) > f(a)$ per ogni $y \in X$, $y \neq a$.
(2) un punto $a \in X$ è detto di *massimo* assoluto per f se $f(y) \leq f(a)$ per ogni $y \in X$. Il massimo si dice stretto se $f(y) < f(a)$ per ogni $y \in X$, $y \neq a$.

Definizione 16.7. Sia X spazio topologico, $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione.

(1) un punto $a \in X$ è detto di *minimo* locale per f se esiste U intorno di a tale che $f(y) \geq f(a)$ per ogni $y \in U$. Il minimo si dice stretto se $f(y) > f(a)$ per ogni $y \in U$, $y \neq a$.
(2) un punto $a \in X$ è detto di *massimo* locale per f se esiste U intorno di a tale che $f(y) \leq f(a)$ per ogni $y \in U$. Il minimo si dice stretto se $f(y) < f(a)$ per ogni $y \in U$, $y \neq a$.

Massimi e minimi locali vengono detti estremanti locali.

Definizione 16.8. Siano X normato, $D \subset X$ aperto, $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$. Se a è estremante di f e $u \in X$ è tale che $D_u f(a)$ esiste, allora $D_u f(a) = 0$. In particolare se f è differenziabile in a si ha che $Df(a)$ è la funzione nulla.

Definizione 16.9. Siano X normato, $D \subset X$ aperto, $f : D \to \mathbb{R}$ differenziabile in D. Sia $a \in D$. Diremo che a è critico per f se $Df(a) = 0$.

Teorema 16.10 (Schwarz). *X normato, D aperto di X, $f : D \to \mathbb{R}$, $p \in D$. Supponiamo che $\partial_u f(x)$, $\partial_v f(x)$, $\partial_u \partial v f(x)$ esistano in un intorno di p e siano continue in p. Allora esiste $\partial_v \partial_u f(p)$ e vale:*

$$\partial_v \partial_u f(p) = \partial_u \partial_v f(p).$$

Definizione 16.11. Se $X = \mathbb{R}^n$, la matrice (simmetrica) delle derivate seconde di f:

$$H(p) = (\partial_i \partial_j f(p))_{ij}$$

prende il nome di matrice hessiana di f calcolata in p, verrà indicata anche con $\operatorname{Hess} f(p)$.

Teorema 16.12. *Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $f \in C^2(D, \mathbb{R})$. Sia a critico per f. Allora:*

(1) *Se la forma quadratica $f''(a)(h, h)$ associata alla matrice hessiana di f è definita positiva (negativa) allora a è di minimo (massimo) locale stretto per f;*
(2) *Se la forma quadratica $f''(a)(h, h)$ associata alla matrice hessiana di f assume valori di ambo i segni, allora a non è né di massimo né di minimo per f e prende il nome di punto di sella;*
(3) *se a è di minimo (massimo) locale per f, allora $f''(a)(h, h)$ è semidefinita positiva (negativa).*

Definizione 16.13. Lo studio degli estremanti locali p, nel caso il differenziale secondo in p esista, è quindi ricondotto allo studio degli autovalori della matrice hessiana $H = D^2 f(p)$ di f nel punto p:

(1) Se tutti gli autovalori di $D^2 f(p)$ sono strettamente positivi, la matrice hessiana è definita positiva, se sono tutti strettamente negativi, la matrice hessiana è definita negativa. Quindi se p è critico è rispettivamente di minimo stretto o di massimo relativo stretto.
(2) Se gli autovalori non nulli di $D^2 f(p)$ sono positivi, la matrice hessiana è semidefinita positiva, se sono negativi , la matrice hessiana è semidefinita negativa. **In generale in questo caso non possiamo concludere che se p è critico esso è un massimo o minimo relativo.**
(3) Se compaiono autovalori di segno discorde, allora si ha un punto di sella.
(4) Se, preso un elemento della diagonale, esso e tutti i minori principali ottenuti orlando via via con nuove righe e colonne di uguale indice, sono strettamente positivi, allora la forma quadratica associata ad H è definita positiva.

(5) Preso un elemento della diagonale, consideriamo esso e tutti i minori principali ottenuti orlando via via con nuove righe e colonne di uguale indice. Se fra questi minori quelli di ordine dispari sono strettamente negativi e quelli di ordine pari strettamente positivi, allora la forma quadratica associata ad H è definita negativa.

OSSERVAZIONE 16.14. Si ricordi che se A è una matrice 2×2, allora gli autovalori sono soluzioni dell'equazione

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\,\lambda + \det A = 0,$$

dove $\operatorname{tr}(A)$ è la traccia di A, ovvero la somma degli elementi della diagonale principale di A.

OSSERVAZIONE 16.15. Nel caso speciale in cui $f : \Omega \to \mathbb{R}$ con Ω aperto di $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \Omega$, $\nabla f(x_0, y_0) = 0$, i criteri precedenti si riducono a:

- Se $\partial^2_{xx} f(x_0, y_0) > 0$ e $\det D^2(x_0, y_0) > 0$ allora (x_0, y_0) è di minimo.
- Se $\partial^2_{xx} f(x_0, y_0) < 0$ e $\det D^2(x_0, y_0) > 0$ allora (x_0, y_0) è di massimo.
- Se $\det D^2(x_0, y_0) < 0$ allora (x_0, y_0) è di sella.
- Se $\det D^2(x_0, y_0) = 0$ nessuna informazione.

OSSERVAZIONE 16.16. Si ricordi che lo studio dei punti critici fornisce condizioni sufficienti per i minimi locali: infatti presuppone l'esistenza di differenziale primo e secondo. Già in $\mathbb{R}$ si è visto come la funzione $f(x) = |x|$ abbia minimo in 0 pur non essendo derivabile.

ESERCIZIO 16.17. Calcolare massimi e minimi relativi delle seguenti funzioni:

(1) $f(x, y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y$
(2) $f(x, y) = x^3 + y^3 - (1 + x + y)^3$
(3) $f(x, y) = \cos x \sin y$
(4) $f(x, y) = x^4 + x^2y + y^2 + 3$
(5) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x^2 + y^4) + 4xy$

SVOLGIMENTO. Tutte queste funzioni hanno derivate parziali continue in ogni punto, pertanto il differenziale primo esiste, inoltre le derivate parziali seconde esistono e sono continue, pertanto il differenziale secondo esiste.

(1) Calcoliamo i punti critici di f:

$$\begin{cases} \partial_x f(x, y) = 6x^2 - 6x = 0 \Longrightarrow x \in \{0, 1\}, \\ \partial_y f(x, y) = 3y^2 - 3 = 0 \Longrightarrow y \in \{1, -1\}. \end{cases}$$

Si ricava che vi sono quattro punti critici: $(0, \pm 1)$ e $(1, \pm 1)$. Calcoliamo la matrice hessiana di f:

$$D^2 f(x, y) =: \begin{pmatrix} \partial^2_{xx} f(p) & \partial^2_{xy} f(p) \\ \partial^2_{yx} f(p) & \partial^2_{yy} f(p) \end{pmatrix},$$

osservando che per il Teorema di Schwarz tale matrice è simmetrica.

$$\partial^2_{xx} f(x, y) = 12x - 6, \partial^2_{yx} f(x, y) = \partial^2_{xy} f(x, y) = 0, \partial^2_{yy} f(x, y) = 6y.$$

Pertanto:

$$D^2 f(x, y) =: \begin{pmatrix} 12x - 6 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}.$$

In particolare, gli autovalori di $D^2 f(x, y)$ sono $\lambda_1(x, y) = 12x - 6$ e $\lambda_2(x, y) = 6y$. Andiamo a studiare il segno di tali autovalori nei quattro punti critici:

(a) $\lambda_1(0, 1) = -6$, $\lambda_2(0, 1) = 6$: autovalori discordi, $(0, 1)$ è di sella.
(b) $\lambda_1(0, -1) = -6$, $\lambda_2(0, -1) = -6$: autovalori strettamente negativi, $(0, -1)$ è di massimo relativo.
(c) $\lambda_1(1, 1) = 6$, $\lambda_2(1, 1) = 6$: autovalori strettamente positivi, $(1, 1)$ è di minimo relativo.
(d) $\lambda_1(1, -1) = 18$, $\lambda_2(1, -1) = -6$: autovalori discordi, $(1, -1)$ è di sella.

(2) Prima di procedere osserviamo che la funzione è simmetrica $f(x,y) = f(y,x)$, Ciò abbrevierà notevolmente i calcoli. Calcoliamo i punti critici di f:

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = 3x^2 - 3(1+x+y)^2 = 0 \\ \partial_y f(x,y) = 3y^2 - 3(1+x+y)^2 = 0. \end{cases}$$

Si ricava $x = \pm y$. Sostituendo $x = -y$, si ha $3y^2 - 3 = 0$, da cui $y = \pm 1$, per cui i punti critici risultano $(-1,1)$ e $(1,-1)$. Sostituendo $x = y$ si ha $3y^2 - 3(1+4y^2+2y) = 0$ da cui $y = -1$ e $y = -1/3$, per cui i punti critici risultano $(-1,-1)$ e $(-1/3,-1/3)$. Osserviamo che l'insieme dei punti critici è chiuso rispetto alla simmetria $(x,y) \mapsto (y,x)$, com'era lecito attendersi.

Calcoliamo le derivate seconde:

$$\partial^2_{xx} f(x,y) = 6x - 6(1+x+y), \partial^2_{yy} f(x,y) = 6y - 6(1+x+y), \partial^2_{xy} f(x,y) = \partial^2_{yx} f(x,y) = -6(1+x+y).$$

Si ha quindi

$$D^2 f(-1,1) =: \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D^2 f(1,-1) =: \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix},$$

$$D^2 f(-1,-1) =: \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D^2 f(-1/3,-1/3) =: \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo gli autovalori in $(-1,1)$: essi sono soluzioni di $\lambda^2 + 12\lambda - 36 = 0$, ovvero $\lambda_1 = -6 + 6\sqrt{2}$ e $\lambda_1 = -6 - 6\sqrt{2}$. Essi sono di segno discorde, quindi questo punto è di sella.

Calcoliamo gli autovalori in $(1,-1)$: essi sono gli stessi di $(-1,1)$ quindi questo punto è di sella.

Calcoliamo gli autovalori in $(-1,-1)$: essi sono soluzioni di $\lambda^2 - 36 = 0$, ovvero $\lambda = \pm 6$, essi sono di segno discorde, quindi questo punto è di sella.

Calcoliamo gli autovalori in $(-1/3,-1/3)$: essi sono soluzioni di $\lambda^2 + 8\lambda + 12 = 0$, ovvero $\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = -2$. Essi sono strettamente negativi, quindi questo punto è di massimo relativo. Si poteva procedere anche osservando che il primo elemento della diagonale principale (minore di ordine dispari) è strettamente negativo, e il determinante (ovvero il minore di ordine pari ottenuto orlando il precedente di una riga e colonna dello stesso indice) è positivo.

(3) La funzione è 2π-periodica in ciascuna delle sue componenti. Pertanto limitiamo lo studio al quadrato $[0,2\pi[\times[0,2\pi[$, estendendo poi i risultati per periodicità. Le derivate parziali sono $\partial_x f(x,y) = -\sin x \sin y$ e $\partial_y f(x,y) = \cos x \cos y$. Studiamo i punti critici, ovvero dove esse si annullano simultaneamente. Si ha $\partial_x f(x,y) = 0$ per $x \in \{0,\pi\}$ oppure $y \in \{0,\pi\}$, e $\partial_y f(x,y) = 0$ per $x \in \{\pi/2, 3\pi/2\}$ oppure $y \in \{\pi/2, 3\pi/2\}$. I punti critici sono quindi $(0,\pi/2)$, $(0,3\pi/2)$, $(\pi,\pi/2)$, $(\pi,3\pi/2)$, $(\pi/2,0)$, $(3\pi/2,0)$, $(\pi/2,\pi)$, $(3\pi/2,\pi)$.

Le derivate seconde sono

$$\partial^2_{xx} f(x,y) = -\cos x \sin y, \qquad \partial^2_{yy} f(x,y) = -\cos x \sin y, \qquad \partial^2_{xy} f(x,y) = -\sin x \cos y.$$

Si ha quindi:

$$D^2 f(0,\pi/2) =: \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{massimo}, \qquad D^2 f(0,3\pi/2) =: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{minimo},$$

$$D^2 f(\pi,\pi/2) =: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{minimo}, \qquad D^2 f(\pi,3\pi/2) =: \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{massimo},$$

$$D^2 f(\pi/2,0) =: \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{sella}, \qquad D^2 f(3\pi/2,0) =: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{sella},$$

$$D^2 f(\pi/2,\pi) =: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{sella}, \qquad D^2 f(3\pi/2,\pi) =: \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{sella}.$$

Pertanto:

(a) la funzione assume il massimo nei punti $(2k\pi, \pi/2+2h\pi)$, $(\pi+2k\pi, 3\pi/2+2h\pi)$, $h, k \in \mathbb{Z}$, e tale massimo vale 1.
(b) la funzione assume il minimo nei punti $(2k\pi, 3\pi/2+2h\pi)$, $(\pi+2k\pi, \pi/2+2h\pi)$, $h, k \in \mathbb{Z}$, e tale minimo vale -1.
(c) i punti $(\pi/2 + k\pi, h\pi)$, $h, k \in \mathbb{Z}$ sono di sella.

(4) Le derivate parziali sono
$$\partial_x f(x, y) = 4x^3 + 2xy = x(4x^2 + y), \qquad \partial_y f(x, y) = x^2 + 2y.$$
Tali derivate su annullano simultaneamente solo in $(0, 0)$ come si vede per sostituzione. Calcoliamo le derivate seconde: $\partial^2_{xx} f(x, y) = 12x^2 + 2y$, $\partial^2_{yy} f(x, y) = 2$, $\partial^2_{xy} f(x, y) = 2x$. Si ha quindi
$$D^2 f(0, 0) =: \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{semidefinita positiva.}$$
La matrice è semidefinita, per cui non possiamo immediatamente dire se $(0, 0)$ sia un estremale. Osserviamo che $f(x, y) = g(x^2, y)$ dove $g(v, w) = v^2 + vw + w^2 + 3$. Studiamo il segno dell'espressione $v^2 + vw + w^2$ per $v > 0$ (infatti è $v = x^2 > 0$ se $x \neq 0$). Per $v > 0$ fissato, risolviamo $v^2 + vw + w^2 = 0$ come equazione in w. Il discriminante di tale equazione è $v^2 - 4v^2 < 0$, quindi l'espressione $v^2 + vw + w^2$ non è mai nulla se $v > 0$. In particolare (prendendo i limiti per $w \to \pm\infty$ per $v > 0$ fissato) si ottiene che tale espressione è sempre strettamente positiva. Quindi $f(x, y) = g(x^2, y) > 3 = f(0, 0)$ per ogni $x \neq 0$, e quindi $(0, 0)$ è di minimo assoluto stretto.

(5) Sia $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x^2 + y^4) + 4xy$. Le derivate parziali sono
$$\partial_x f(x, y) = 4x^3 - 4x + 4y, \qquad \partial_y f(x, y) = -4y^3 + 4x.$$
Esse si annullano nei punti che soddisfano $x = y^3$, $4y^9 - 4y^3 + 4y = 0$, ovvero $x = y^3$, $y(y^8 - y^2 + 1) = 0$. Si ha la soluzione $(0, 0)$. Proviamo che essa è l'unica. E' sufficiente provare che $y^8 - y^2 + 1 \neq 0$ se $y \neq 0$: infatti, se $0 < |y| \leq 1$ si ha $1 - y^2 \geq 0$, pertanto $y^8 - y^2 + 1 \geq y^8 > 0$, e se $|y| > 1$ si ha $y^8 > y^2$ da cui $y^8 - y^2 + 1 > 1 > 0$. Quindi l'unico punto critico è l'origine. Calcoliamo le derivate seconde: $\partial^2_{xx} f(x, y) = 12x^2 - 4$, $\partial^2_{yy} f(x, y) = -12y^2$, $\partial^2_{xy} f(x, y) = 4$. Si ha quindi:
$$D^2 f(0, 0) =: \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \text{sella,}$$
perché gli autovalori sono soluzioni di $\lambda^2 + 4\lambda - 16 = 0$, ovvero $\lambda = -2 \pm 2\sqrt{5}$, quindi sono di segno discorde.

CAPITOLO 17

Lezione del giorno giovedì 14 novembre 2013 (1 ora)
Massimi e minimi per funzioni di più variabili - continuazione

Esercizio 17.1. Determinare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione:

$$f(x,y) = x^3 + xy + \lambda x + \mu y$$

abbia un punto critico $P = (1/\sqrt{3}, 0)$. Trovare quindi per la $f(x,y)$ relativa a quei particolari valori di λ e μ tutti i punti di massimo e minimo relativo.

Svolgimento. Per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ la funzione è C^2. Calcoliamo le derivate parziali:

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) & = 3x^2 + y + \lambda, \\ \partial_y f(x,y) & = x + \mu. \end{cases}$$

Dobbiamo imporre che esse si annullino nel punto $(1/\sqrt{3}, 0)$, pertanto si ottiene $\mu = -1/\sqrt{3}$ e $\lambda = -1$. Quindi la funzione con questi valori dei parametri risulta:

$$f(x,y) = x^3 + xy^2 - x - \frac{1}{\sqrt{3}} y,$$

e le sue derivate parziali risultano essere: $\partial_x f(x,y) = 3x^2 + y - 1$ e $\partial_y f(x,y) = x - 1/\sqrt{3}$. Tali derivate si annullano simultaneamente solo in P che pertanto è l'unico punto critico. Calcoliamo le derivate seconde:

$$\partial^2_{xx} f(x,y) = 6x, \qquad \partial^2_{yy} f(x,y) = 0, \qquad \partial^2_{xy} f(x,y) = 1,$$

pertanto si ha:

$$D^2 f(P) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori sono le soluzioni di $\lambda^2 - 2\sqrt{3}\lambda - 1 = 0$, ovvero $\sqrt{3} \pm 2$, di segno discorde, quindi si ha un punto di sella.

Esercizio 17.2. Si studino, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ i punti di massimo e minimo per la funzione

$$f(x,y,z) = \cos^2 x + y^2 - 2y + 1 + \alpha z^2.$$

Si dica se f è superiormente o inferiormente limitata.

Svolgimento. La funzione è C^2 su tutto $\mathbb{R}^3$. Osserviamo inoltre che scelta la curva $\gamma(t) = (0,t,0)$, si ha $\lim_{t \to +\infty} f \circ \gamma(t) = +\infty$, pertanto la funzione è superiormente illimitata e non ammette punti di massimo assoluto.

Se $\alpha < 0$, scelta la curva $\gamma(t) = (0,0,t)$, si ha $\lim_{t \to +\infty} f \circ \gamma(t) = -\infty$ quindi per $\alpha < 0$ la funzione è inferiormente illimitata e non ammette punti di minimo assoluto.

Se $\alpha \geq 0$ si ha

$$f(x,y,z) \geq y^2 - 2y + 1 = f\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, y, 0\right), \; k \in \mathbb{Z},$$

e il minimo assoluto di $y \mapsto y^2 - 2y + 1$ si ha per $y = 1$. Quindi i punti $(\frac{\pi}{2} + k\pi, 1, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, sono di minimo assoluto per f e vale $f(\frac{\pi}{2} + k\pi, 1, 0) = 0$ per $k \in \mathbb{Z}$.

Studiamo ora gli estremali relativi. Calcoliamo le derivate parziali:

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x,y,z) &= -2\cos x \sin x = -\sin(2x)\\
\partial_y f(x,y,z) &= 2y-2\\
\partial_z f(x,y,z) &= 2\alpha z.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial^2_{xx} f(x,y,z) &= -2\cos(2x)\\
\partial^2_{yy} f(x,y,z) &= 2\\
\partial^2_{zz} f(x,y,z) &= 2\alpha\\
\partial^2_{xy} f(x,y,z) &= \partial^2_{xz} f(x,y,z) = \partial^2_{zy} f(x,y,z) = 0.
\end{aligned}$$

Distinguiamo due casi:

(1) Supponiamo $\alpha \neq 0$. Allora i punti critici sono $P_k = (k\pi/2, 1, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. Si ha $\partial^2_{xx} f(P_k) = 2(-1)^{k+1}$, $\partial^2_{yy} f(P_k) = 2$ e $\partial^2_{zz} f(P_k) = 2\alpha$, le altre derivate seconde sono tutte nulle. Si ha quindi

$$D^2 f(P_k) = \begin{pmatrix} 2(-1)^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Se $\alpha > 0$, il punto P_k è un minimo per k dispari e una sella per k pari. Se P_k è di minimo, allora $f(P_k) = 0$. Se invece $\alpha < 0$ i punti P_k sono tutti di sella.

(2) Supponiamo $\alpha = 0$. Allora i punti critici sono $P_{kz} = (k\pi/2, 1, z)$, $k \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{R}$. Si ha $\partial^2_{xx} f(P_k) = 2(-1)^{k+1}$, $\partial^2_{yy} f(P_k) = 2$, le altre derivate seconde sono tutte nulle. Si ha quindi

$$D^2 f(P_{kz}) = \begin{pmatrix} 2(-1)^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice è semidefinita, quindi la teoria generale ci dice che non potremmo concludere nulla. Tuttavia per ogni z si ha che $f(x,y,z) = f(x,y,0)$ perché la funzione non dipende da z. In particolare, detta $g(x,y) = f(x,y,0) = f(x,y,z)$, si ha che (x,y,z) è estremale relativo di f se e solo se lo è per g. La matrice hessiana di g nei punti $Q_k = (k\pi/2, 1)$ è

$$D^2 g(Q_k) = \begin{pmatrix} 2(-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poiché $P_{kz} = (Q_k, z)$, si ha che il punto P_{kz} è un minimo per k dispari e una sella per k pari. Se P_{kz} è di minimo, allora $f(P_{kz}) = 0$.

Riassumendo:

(1) Per $\alpha > 0$ la funzione non ammette massimi assoluti, i punti critici sono $P_k = (k\pi/2, 1, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, e tali punti sono minimi relativi e assoluti per k dispari e selle per k pari. Il valore minimo di f è 0.

(2) Per $\alpha < 0$ la funzione non ammette né minimi, né massimi assoluti, i punti critici sono $P_k = (k\pi/2, 1, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, e sono tutti punti di sella.

(3) Per $\alpha = 0$, la funzione non ammette massimi assoluti, i punti critici sono

$$P_{kz} = (k\pi/2, 1, z) \qquad k \in \mathbb{Z},\ z \in \mathbb{R},$$

e sono minimi relativi e assoluti per k dispari, e selle per k pari. Il valore minimo di f è 0.

Esercizio 17.3. Si calcolino al variare di $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ i punti di massimo e minimo locali e assoluti della funzione $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x,y) = (x^2 + 3xy^2 + 2y^4)^n.$$

Si dica se tale funzione è superiormente o inferiormente limitata.

SVOLGIMENTO. La funzione f_n si può scrivere come composizione delle funzioni $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $g(x,y) = x^2 + 3xy^2 + 2y^4$ e $h(s) = s^n$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, infatti:

$$f(x,y) = h(g(x,y)).$$

Distinguiamo ora i casi n dispari e n pari:

(1) La funzione h è strettamente crescente per n dispari. Pertanto per n dispari si ha

$$f(x_1,y_1) = h(g(x_1,y_1)) > h(g(x_2,y_2)) = f(x_2,y_2) \iff g(x_1,y_1) > g(x_2,y_2),$$

quindi i punti di massimo e minimo relativi e assoluti di f sono esattamente i punti rispettivamente di massimo e minimo relativo e assoluto di g, e pertanto non dipendono da n (purché n sia dispari). Studiamo quindi la funzione g. Scelta la curva $\gamma(t) = (0,t)$ si ha che $\lim_{t\to\infty} g \circ \gamma(t) = +\infty$, quindi g è superiormente illimitata e non ammette massimo assoluto, e quindi anche f è superiormente illimitata e non ammette massimo assoluto.

Si ha

$$g(x,y) = \left(x + \frac{3}{2}y^2\right)^2 - \frac{1}{4}y^4.$$

Scegliamo quindi la curva $\gamma(t) = (-3/2t^2, t)$ e osserviamo che $\lim_{t\to\infty} g\circ\gamma(t) = \lim_{t\to\infty} -t^4/4 = -\infty$, pertanto g non ammette minimo assoluto e quindi nemmeno f.

Studiamo i punti critici di g: le derivate parziali sono

$$\partial_x g(x,y) = 2x + 3y^2, \qquad \partial_y g(x,y) = 6xy + 8y^3 = 2y(3x + 4y^2)$$

La derivata prima rispetto ad y si annulla per $y = 0$, in tal caso la derivata prima rispetto alla x si annulla per $x = 0$. Se $y \neq 0$, la derivata prima rispetto ad y si annulla per $x = -4y^2/3$, sotituendo nella derivata prima rispetto alla x si ottiene $-8y^2/3 + 3y^2 = 0$ da cui $(-8/3+3)y^2 = 0$ che non ammette soluzioni non nulle. Quindi l'unico punto critico è l'origine e $g(0,0) = 0$. Fissato un intorno V dell'origine, consideriamo la curva $\gamma(t) = (-3/2t^2, t)$ e osserviamo che per $t > 0$ sufficientemente piccolo si ha $\gamma(t) \in V$. Proviamo questo fatto: esiste $\varepsilon > 0$ tale per cui $B((0,0),\varepsilon) \subseteq V$ per definizione di intorno, d'altra parte si ha $|\gamma(t)| = \sqrt{9/4t^4 + t^2}$ che tende a zero per $t \to 0$, pertanto esiste $\delta > 0$ tale per cui se $|t| < \delta$ si ha $|\gamma(t)| < \varepsilon$ e quindi $\gamma(t) \in B((0,0),\varepsilon) \subseteq V$.

Ma allora $g \circ \gamma(t) = -t^4/4 < 0 = f(0,0)$ per ogni $t \in]0,\delta[$ pertanto ogni intorno di 0 contiene punti dove g è minore di $g(0,0)$. D'altra parte scelta la curva $\gamma_2(t) = (t,0)$ si ha che per t sufficientemente piccolo $\gamma(t)$ appartiene ancora a V (stesso ragionamento precedente) e $g \circ \gamma(t) = t^2 > 0 = g(0,0)$ per ogni $t \neq 0$. Quindi in ogni intorno di $(0,0)$ esistono sia punti in cui g è maggiore di $g(0,0)$, sia punti dove g è minore di $g(0,0)$. Quindi $(0,0)$ è di sella per g e quindi per f.

Sebbene non indispensabile, osserviamo a margine che $(0,0)$ non è l'unico punto critico di f, perché la funzione h ammette come punto critico 0, quindi tutti i punti (x,y) con $g(x,y) = 0$ sono critici per f. Tuttavia essi non sono massimi o minimi relativi per f, altrimenti per la stretta monotonia, lo dovrebbero essere per g ma l'unico punto critico di g è $(0,0)$ che è di sella.

(2) Se n è pari, la funzione $h(s)$ è sempre non negativa e raggiunge il suo minimo assoluto per $s = 0$, quindi i punti $x^2 + 3xy^2 + y^4 = 0$ sono tutti punti di minimo assoluto e in essi f vale 0. Con lo stesso ragionamento precedente, si ha che non esistono punti di massimo assoluti. Inoltre si ha che la restrizione di h a ciascuno degli insiemi $[0,+\infty[$ e $]-\infty,0]$ è strettamente monotona L'insieme $G^+ := \{(x,y) : x^2 + 3xy^2 + y^4 > 0\}$ è aperto perché g è continua. In esso non vi sono estremali relativi per f: infatti, se vi fossero, sarebbero estremali di g perché $g(G^+) \subseteq]0,+\infty[$ e h su tale insieme è strettamente monotona. Tuttavia come già visto g ammette come unico punto critico $(0,0) \notin G^+$. Analogamente, non vi sono estremali relativi di g e quindi di f su $G^- := \{(x,y) : x^2 + 3xy^2 + y^4 < 0\}$. Pertanto gli unici estremali di f in questo caso sono i punti di minimo assoluto $x^2 + 3xy^2 + y^4 = 0$ e in essi f vale 0.

Esercizio 17.4. Si studi la natura del punto $(0,0)$ per la funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y)=\log(1+x^2)-x^2+xy^2+y^3+2.$$

Svolgimento. Osserviamo che $f(0,0)=2$. Il punto $(0,0)$ è un punto critico: $\partial_x f(0,0)=\partial_y f(0,0)=0$. Consideriamo la curva $\gamma(t)=(0,t)$. Si ha per $t\neq 0$ che $f\circ\gamma(t)=t^3+2$. Fissato un intorno dell'origine, per $|t|$ sufficientemente piccolo, si ha che $\gamma_1(t)$ appartiene tale intorno: infatti $\lim_{t\to 0}\gamma(t)=(0,0)$. Inoltre per $t>0$ si ha $f\circ\gamma(t)>2=f(0,0)$ e $f\circ\gamma(t)<2=f(0,0)$ per $t<0$. Pertanto $(0,0)$ è di sella.

Esercizio 17.5. Si determinino gli eventuali punti di massimo e minimo assoluto e relativo per le funzioni $f,g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definite da

$$f(x,y,z)=x^2(y-1)^3(z+2)^2, \qquad g(x,y,z)=1/x+1/y+1/z+xyz.$$

Si dica se tali funzioni sono superiormente o inferiormente limitate.

Svolgimento. Consideriamo la curva $\gamma(t)=(1,t,1)$. Si ha $f\circ\gamma_1(t)=9(t-1)^3$, pertanto per $t\to\pm\infty$ il limite di $f\circ\gamma_1(t)$ è $\pm\infty$, f è superiormente e inferiormente illimitata, quindi non esistono massimi o minimi assoluti per f

Calcoliamo i punti critici di f:

$$\begin{aligned}\partial_x f(x,y,z)&=2x(y-1)^3(z+2)^2\\ \partial_y f(x,y,z)&=3x^2(y-1)^2(z+2)^2\\ \partial_z f(x,y,z)&=2x^2(y-1)^3(z+2).\end{aligned}$$

Le derivate sono tutte nulle per $x=0$ oppure $y=1$ oppure $z=-2$. Quindi si hanno i punti critici: $(0,y,z)$, $(x,1,z)$, $(x,y,-2)$ al variare di $x,y,z\in\mathbb{R}$. In tutti i punti critici la funzione vale 0. Nei punti critici $(0,y,z)$ e $(x,y,-2)$ osserviamo che per $y>1$, esiste un intorno di $(0,y,z)$ e $(x,y,-2)$ dove la funzione è positiva: infatti se y' è sufficientemente vicino a $y>1$ allora $(x')^2(y'-1)^3(z+2)^2>0$. Per $y<1$, analogamente, esiste un intorno di $(0,y,z)$ e $(x,y,-2)$ dove la funzione è negativa. Per $y=1$ ogni intorno di $(0,1,z)$ e $(x,1,-2)$ contiene punti dove la funzione assume valore di ambo i segni. Di conseguenza, i punti $(0,y,z)$ e $(x,y,-2)$ sono minimi locali per $y>1$, massimi locali per $y<1$ e i punti $(0,1,z)$ e $(x,1,-2)$ sono di sella. Restano da studiare i punti $(x,1,z)$, ma per essi vale quanto già visto a proposito di $(0,1,z)$ e $(x,1,-2)$, tali punti sono di sella.

Consideriamo la curva $\gamma(t)=(1,t,1)$. Si ha $g\circ\gamma_1=2+1/t+t$ pertanto per $t\to\pm\infty$ il limite di $g\circ\gamma_1(t)$ è $\pm\infty$, quindi non esistono massimi o minimi assoluti per g.

Osserviamo la simmetria rispetto all'origine del grafico $g(x,y,z)=-g(-x,-y,-z)$. Si ha:

$$\nabla g(x,y,z)=\left(yz-\frac{1}{x^2},xz-\frac{1}{y^2},xy-\frac{1}{z^2}\right).$$

Dobbiamo determinare i punti in cui le derivate si annullano. Da queste equazioni si ha $x^2yz=xy^2z=xyz^2=1$. Pertanto, dividendo per xyz, si ottiene dalle prime tre uguaglianze $x=y=z$. Sostituendo nell'equazione $x^2yz=1$, si ha $x^4=1$ quindi $x=\pm1$. Si ottengono allora $(1,1,1)$ e $(-1,-1,-1)$. L'Hessiano è:

$$\operatorname{Hess} g(x,y,z)=\begin{pmatrix}\frac{2}{x^3} & z & y\\ z & \frac{2}{y^3} & x\\ y & x & \frac{2}{z^3}\end{pmatrix},$$

e quindi

$$\operatorname{Hess} g(1,1,1)=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}, \qquad \operatorname{Hess} g(-1,-1,-1)=\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\-1&-2&-1\\-1&-1&-2\end{pmatrix}.$$

Consideriamo $\operatorname{Hess} g(1,1,1)$. Si ha che i determinanti delle sottomatrici costruite con le prime i righe e i colonne sono tutti positivi per $i=1,2,3$: infatti sono rispettivamente 2, 3, 4, pertanto la matrice è definita positiva e il punto $(1,1,1)$ è di minimo relativo. Si ha $g(1,1,1) = 4$. Poiché $g(-x,-y,-z) = -g(x,y,z)$, si ha che il punto $(-1,-1,-1)$ è di massimo relativo e $g(-1,-1,-1) = -4$.

Esercizio 17.6. Si determinino al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ gli estremi assoluti e locali della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^\alpha \log(x^2+y^2) & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Svolgimento. In coordinate polari si ha

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = 2\rho^{2\alpha}\log\rho =: g_\alpha(\rho).$$

Se $\alpha = 0$, si ha $\lim_{\rho\to 0^+} g_0(\rho) = -\infty$ e $\lim_{\rho\to+\infty} g_0(\rho) = +\infty$ quindi non vi sono massimi o minimi assoluti. Si ha che esiste un intorno dell'origine dove g_0 è negativa, mentre $g_0(0) = 0$, pertanto 0 è di massimo relativo. La funzione g_0 risulta strettamente crescente, per cui non vi sono altri massimi o minimi locali.

Se $\alpha < 0$, si ha $\lim_{\rho\to 0^+} g_0(\rho) = -\infty$, quindi non vi sono minimi assoluti, invece $\lim_{\rho\to+\infty} g_\alpha(\rho) = 0 = g_\alpha(1)$, pertanto vi sono massimi assoluti. Come prima, si ha che esiste un intorno dell'origine dove g_α è negativa, mentre $g_\alpha(0) = 0$, pertanto 0 è di massimo relativo. La derivata di g_α è

$$g'_\alpha(\rho) = 4\alpha\rho^{2\alpha-1}\log\rho + 2\rho^{2\alpha-1} = 2\rho^{2\alpha-1}(2\alpha\log\rho + 1),$$

e si annulla solo per $\rho = e^{-1/2\alpha}$ che, quindi, è di massimo assoluto. Pertanto i punti $x^2 + y^2 = e^{-1/\alpha}$ sono punti di massimo assoluto.

Se $\alpha > 0$ si ha che f è continua e $\lim_{\rho\to 0^+} g_\alpha(\rho) = 0 = g(1)$ e $g_\alpha(\rho) \leq 0$ in un intorno di 0, quindi l'origine è un massimo relativo. Inoltre si ha $\lim_{\rho\to+\infty} g_0(\rho) = +\infty$, quindi non esistono massimi assoluti. Poiché $g_\alpha(0) = g_\alpha(1) = 0$, si ha che esiste almeno un estremale in $[0,1]$. La derivata di g_α è

$$g'_\alpha(\rho) = 4\alpha\rho^{2\alpha-1}\log\rho + 2\rho^{2\alpha-1} = 2\rho^{2\alpha-1}(2\alpha\log\rho + 1),$$

e si annulla solo per $\rho = e^{-1/2\alpha} < 1$ perché $\alpha > 0$, quindi tale punto deve essere di minimo relativo e assoluto: infatti se fosse di massimo, sarebbe di massimo relativo per il teorema di Rolle, essendo la funzione superiormente illimitata, dovrebbe ammettere un altro minimo (il lettore è incoraggiato a farsi un disegno qualitativo per rendersi conto della situazione). Pertanto i punti $x^2 + y^2 = e^{-1/\alpha}$ sono punti di minimo assoluto.

CAPITOLO 18

Lezione del giorno venerdì 15 novembre 2013 (1 ora)
Massimi e minimi per funzioni di più variabili - continuazione

ESERCIZIO 18.1. Si determini al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la natura del punto $(0,0)$ per le funzioni definite da

$$f(x,y) = 2 + \alpha x^2 + 4xy + (\alpha - 3)y^2 + (2x+y)^4.$$

SVOLGIMENTO. La funzione $f \in C^2$ e si ha $f(0,0) = 2$. Calcoliamo ora le derivate di f:

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x,y) &= 2\alpha x + 4y + 8(2x+y)^3 \\
\partial_y f(x,y) &= 4x + 2(\alpha-3)y + 4(2x+y)^3 \\
\partial_{xx} f(x,y) &= 2\alpha + 48(2x+y)^2 \\
\partial_{xy} f(x,y) &= 4 + 24(2x+y)^2 \\
\partial_{yy} f(x,y) &= 2(\alpha-3) + 12(2x+y)^2.
\end{aligned}$$

Si ha quindi che $(0,0)$ è punto critico e

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2\alpha & 4 \\ 4 & 2(\alpha-3) \end{pmatrix}, \; \det D^2 f(0,0) = (\alpha-4)(\alpha+1).$$

Essendo il determinante il prodotto degli autovalori $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, possiamo già concludere che se $-1 < \alpha < 4$ si ha un sella: in tal caso $\det D^2 f(0,0) < 0$, quindi gli autovalori sono discordi. Per il criterio dei minori principali, se $\det D^2 f(0,0) > 0$ e l'elemento di posto $1,1$ è positivo, allora si ha un minimo, ciò avviene se $\alpha > 4$. Analogamente, se $\det D^2 f(0,0)$ e tale elemento è negativo, allora si ha un massimo, ciò avviene se $\alpha < -1$.

Altro modo: gli autovalori sono le soluzioni di $\lambda^2 - 2(2\alpha-3)\lambda + 4(\alpha^2 - 3\alpha - 4) = 0$, ossia

$$\lambda = 2\alpha - 3 \pm \sqrt{4\alpha^2 + 9 - 12\alpha - 4\alpha^2 + 12\alpha + 16} = 2\alpha - 3 \pm 5,$$

da cui $\lambda_1 = 2(\alpha+1)$ e $\lambda_2 = 2(\alpha-4)$ e $\lambda_1 > \lambda_2$. Se $\lambda_2 > 0$, ovvero $\alpha > 4$ allora gli autovalori sono entrambi positivi e $(0,0)$ è di minimo. Se $\lambda_1 < 0$, ovvero $\alpha < -1$ allora gli autovalori sono entrambi negativi e $(0,0)$ è di massimo.Se $-1 < \alpha < 4$, allora $\lambda_2 < 0$ e $\lambda_1 > 0$, quindi si ha una sella.

Nei casi $\alpha \in \{-1, 4\}$ la matrice è semidefinita, quindi dobbiamo ricorrere a metodi differenti.

Studiamo i casi limite:

(1) se $\alpha = 4$ allora per ogni $(x,y) \neq (0,0)$ si ha
$$f(x,y) = 2 + 4x^2 + 4xy + y^2 + (2x+y)^4 = 2 + (2x+y)^2 + (2x+y)^4 > 2,$$
quindi l'origine è un minimo relativo e assoluto, non è stretto perché $f(x,-2x) = 2$ per ogni x.

(2) se $\alpha = -1$ allora si ha
$$f(x,y) = 2 - x^2 + 4xy - 4y^2 + (2x+y)^4 = 2 - (x-2y)^2 + (2x+y)^4.$$
Scelta la curva $\gamma_1(t) = (2t, t)$, si ha per $t > 0$ che $f \circ \gamma_1(t) = 2 + 5^4 t^4 > 2$, d'altra parte scelta la curva $\gamma_2(t) = (t, -2t)$, si ha per $t > 0$ che $f \circ \gamma_2(t) = 2 - 25t^2 < 2$. Poiché per $t \to 0$ si ha che $\gamma_1(t) \to (0,0)$ e $\gamma_2(t) \to (0,0)$, in ogni intorno di $(0,0)$ vi sono punti di $\gamma_1(t)$, dove f è strettamente maggiore di $f(0,0)$ e punti di $\gamma_2(t)$, dove f è strettamente minore di $f(0,0)$. Quindi $(0,0)$ è di sella.

ESERCIZIO 18.2. Si calcolino massimi e minimi della funzione $f(x,y) = x^3 - 6xy + 3y^2 + 3x$. Si dica se f è limitata.

SVOLGIMENTO. Scelta la curva $\gamma_1(t) = (t,0)$ si ha $\lim_{t\to\pm\infty} f\circ\gamma_1(t) = \pm\infty$, quindi non vi sono massimi o minimi assoluti e la funzione è illimitata superiormente e inferiormente. Le derivate parziali sono

$$\partial_x f(x,y) = 3x^2 - 6y + 3, \qquad \partial_y f(x,y) = -6x + 6y.$$

Sostituendo, si ha che esse si annullano simultaneamente solo su $(1,1)$. Calcoliamo le derivate seconde: $\partial^2_{xx} f(x,y) = 6x$, $\partial^2_{yy} f(x,y) = 6$, $\partial^2_{xy} f(x,y) = -6$. Si ha quindi:

$$D^2 f(1,1) =: \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori sono le radici di $\lambda^2 - 12\lambda = 0$, ovvero $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 12 > 0$. La matrice è semidefinita, per cui per determinare la natura del punto critico dobbiamo ricorrere ad altri metodi. Osserviamo che $f(1,1) = 1$. Calcoliamo un autovettore $v = (v_1, v_2)$ corrispondente all'autovalore nullo, ovvero una base di $\ker D^2 f(1,1)$: si può scegliere $(v_1, v_2) = (1,1)$. Consideriamo la curva $\gamma(t) = (1,1) + tv$ e calcoliamo

$$\begin{aligned} f\circ\gamma(t) &= (1+t)^3 - 6(1+t)^2 + 3(1+t)^2 + 3(1+t) = (1+t)((1+t)^2 - 3(1+t) + 3) \\ &= (1+t)(-5 - 5t^2 - 10t + 3 + 3t + 3) = (1+t)(1 + t^2 + 2t - 3 - 3t + 3) \\ &= (1+t)(t^2 - t + 1) = t^3 + 1. \end{aligned}$$

Per $t \to 0$ si ha $\gamma(t) \to (1,1)$. D'altra parte se $t > 0$ si ha $f\circ\gamma(t) > 1$ e se $t < 0$ si ha $f\circ\gamma(t) < 1$ quindi in ogni intorno di $(1,1)$ vi sono punti dove f è maggiore di $f(1,1) = 1$ e punti dove f è minore di $f(1,1) = 1$. Quindi $(1,1)$ è di sella.

ESERCIZIO 18.3. Si determini al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la natura del punto $(0,0,0)$ per le funzioni definite da

$$g_\alpha(x,y,z) = 5 + \alpha x^2 + 2xy + 4\alpha xz - 6y^2 - 3z^2.$$

SVOLGIMENTO. Si ha $g_\alpha(0,0,0) = 5$, inoltre

$$\begin{aligned} g_\alpha(x,y,z) &= 5 - \left(\frac{x}{\sqrt{6}} - \sqrt{6}y\right)^2 + \frac{x^2}{6} + \alpha x^2 + 4\alpha xz - 3z^2 \\ &= 5 - \left(\frac{x}{\sqrt{6}} - \sqrt{6}y\right)^2 + \frac{x^2}{6} - \left(\sqrt{3}z - \frac{2\alpha}{\sqrt{3}}x\right)^2 + \frac{4\alpha^2}{3}x^2 + \alpha x^2 \\ &= 5 - \left(\frac{x}{\sqrt{6}} - \sqrt{6}y\right)^2 - \left(\sqrt{3}z - \frac{2\alpha}{\sqrt{3}}x\right)^2 + \frac{1}{6}(8\alpha^2 + 6\alpha + 1)x^2. \\ &= 5 - A(x,y) - B_\alpha(x,z) + C_\alpha x^2 \end{aligned}$$

Distinguiamo vari casi:

(1) se $C_\alpha < 0$ ovvero $8\alpha^2 + 6\alpha + 1 < 0$, ovvero $-1/2 < \alpha < -1/4$, si ha per ogni $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ che $g(x,y,z) < 5$, perché $A(x,y) \geq 0$, $B_\alpha(x,y) \geq 0$ e $C_\alpha x^2 < 0$ se $x \neq 0$. In questi casi si ha quindi che l'origine è un massimo assoluto e locale per g. Osserviamo che $g_\alpha(x,y,z) = g_\alpha(0,0,0)$ solo se si verificano simultaneamente $x = A(x,y) = B_\alpha(x,z) = 0$, quindi $x = y = z = 0$ (si ricordi che in questo caso $\alpha \neq 0$), pertanto il massimo è stretto.

(2) se $C_\alpha = 0$, quindi $\alpha \in \{-1/2, -1/4\}$, si ha che per ogni $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ vale $g_\alpha(x,y,z) \leq 5$, quindi l'origine è un massimo assoluto e locale. L'uguaglianza vale solo se $A(x,y) = B_\alpha(x,z) = 0$, ovvero lungo la curva $\gamma(t) = (6t, t, 4\alpha t)$. Poiché $\lim_{t\to 0}\gamma(t) = (0,0,0)$, ogni intorno U dell'origine contiene infiniti punti differenti dall'origine dove g_α assume il valore 5, tali punti sono i punti $\gamma(t)$ per $t \neq 0$, $|t|$ sufficientemente piccolo (che dipende solo da U), pertanto il massimo non è stretto.

(3) se $C_\alpha > 0$, quindi $\alpha \notin [-1/2, -1/4]$, allora lungo la curva γ definita nel punto precedente si ha $f \circ \gamma(t) = 5 + 6Ct^2$ che è strettamente maggiore di 5 se $t \neq 0$. D'altra parte, lungo la curva $\gamma_2(t) = (0, t, 0)$ si ha $f \circ \gamma_2(t) = 5 - 6t^2$, che è strettamente minore di 5 se $t \neq 0$. Le due curve tendono entrambe a zero per $t \to 0$, ciò significa che scelto un qualunque intorno di 0 esse vi appartengono se $|t|$ è sufficientemente piccolo. Ogni intorno di zero quindi contiene sia punti dove g_α è strettamente minore di $g_\alpha(0,0,0) = 5$ che punti dove g_α è strettamente maggiore di $g_\alpha(0,0,0) = 5$. Quindi l'origine è punto di sella.

Altro modo: il gradiente di g_α è dato da:

$$\nabla g_\alpha(x, y, z) = (2\alpha x + 2y + 4\alpha z, 2x - 12y, 4\alpha x - 6z),$$

quindi l'origine è punto critico per ogni α. La matrice Hessiana è data da

$$H_\alpha := D^2 g(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2\alpha & 2 & 4\alpha \\ 2 & -12 & 0 \\ 4\alpha & 0 & -6 \end{pmatrix}, \qquad \det D^2 g(0,0,0) = 192\alpha^2 + 144\alpha + 24.$$

Tale determinante si annulla per $\alpha \in \{-1/2, -1/4\}$, è strettamente negativo per $\alpha \in]-1/2, -1/4[$, e strettamente positivo per $\alpha \notin [-1/2, -1/4]$. Essendo la dimensione pari a 3, non possiamo concludere che se il determinante è negativo si abbia una sella: infatti i tre autovalori potrebbero essere tutti negativi, e quindi il loro prodotto sarebbe negativo, pur avendo un massimo. I minori principali hanno come determinante 2α e $-(6\alpha + 1)$. Per $\alpha \in]-1/2, -1/4[$ quelli di ordine dispari sono negativi e quello di ordine pari è positivo, quindi si ha un massimo. Se invece determinante è positivo pertanto, essendo la dimensione pari a tre, o tutti gli autovalori sono positivi, quindi la matrice è definita positiva, altrimenti si ha una sella. Per $\alpha \in]-\infty, -1/2[\cup]-1/4, 0[$, il determinante è positivo ma il primo minore è negativo, quindi la matrice non è definita positiva. Si ha una sella. Per $\alpha \in [0, +\infty[$, il determinante è positivo ma il secondo minore è negativo, quindi la matrice non è definita positiva. Si ha una sella. La funzione g_α, essendo un polinomio, coincide con la sua serie di Taylor pertanto se la matrice Hessiana è semidefinita positiva o negativa in un punto critico, abbiamo rispettivamente un minimo o un massimo relativo. È importante sottolineare che questa proprietà è vera soltanto perché g_α è un polinomio di secondo grado e quindi coincide con la sua serie di Taylor arrestata al secondo ordine, in particolare si ha:

$$g_\alpha(v) = g_\alpha(0,0,0) + \langle H_\alpha v, v \rangle,$$

Osservando che la matrice è semidefinita negativa per $\alpha \in \{-1/2, -1/4\}$, visto che il primo minore è strettamente negativo e il secondo è strettamente positivo, per questi valore la funzione ha un massimo nell'origine. Riassumendo: si ha una sella per $\alpha \notin]-1/2, -1/4[$ e un massimo per $\alpha \in [-1/2, -1/4]$.